PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

13 Zeige für $m, n \in \mathbb{Z}$: Die natürliche Abbildung $\operatorname{kan} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : x \to (\overline{x}, \overline{x})$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\alpha : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Und α ist genau dann Isomorphismus, wenn m und n teilerfremd sind. Schliesse daraus, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zyklisch ist.

14 (a) Zeige für G Gruppe und X Menge: Eine Abbildung $\rho : G \times X \to X : (g, x) \to gx$ ist eine Linksoperation genau dann, wenn $\widetilde{\rho} : G \to \operatorname{Aut}(X) : g \to (x \to gx)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Ist X K-Vektorraum und geht $\widetilde{\rho}$ nach $\operatorname{GL}(X)$, so heisst ρ $lineare\ Darstellung$ von G auf X. Nenne drei Beispiele mit $X = K^n$ und $G = K^*$, A_n, $\operatorname{SL}_n(K)$. Beschreibe jeweils das Bild von G in $\operatorname{GL}(X)$.

15^s (a) Die Permutationsgruppe S_n operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch die Vertauschung der Komponenten eines Vektors. Präzisiere diese Aussage formelmässig und zeige, dass es sich um eine Linksoperation $\rho : S_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ handelt.

(b) Finde zwei nicht-triviale Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$, die invariant unter S_n sind.

(c) Zeige weiters, dass ρ in natürlicher Weise eine Operation der S_n auf dem Polynomring $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und dem Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der differenzierbaren Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ induziert.

(d) Welche algebraische Verknüpfungen existieren auf den Invariantenringen $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^{S_n}$ aller invarianten Polynome und Funktionen?

16 (a) Ist G Gruppe, so ist $\operatorname{Aut}(G)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition,.

(b) Die Menge $\operatorname{Int}(G) = \{f : G \to G,\ f \text{ Konjugation mit Element von } G\}$ der inneren Automorphismen ist eine normale Untergruppe von $\operatorname{Aut}(G)$.

(b) Illustriere an drei Beispielen und interpretiere jeweils die Konjugationsklassen von Elementen von G.

17 Zeige, dass $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ operiert.

18* Es sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und

$$A = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ meromorph, } f(x + 1) = f(x + \tau) \text{ für alle } x\}$$

die Menge der doppelt-periodischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ bezüglich 1 und τ.

(a) Interpretiere A als Invariantenring einer Gruppenoperation.

(b) Setze

$$p(z) = \tfrac{1}{z^2} + \textstyle\sum_\alpha \tfrac{1}{(z+\alpha)^2} - \tfrac{1}{\alpha^2},$$

wobei die Summe über alle $\alpha \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subseteq \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$ läuft. Zeige, dass $p(z)$ und $p'(z)$ in A liegen.

Hinweis. Die Meromorphie von p ist aufwendiger und muss nicht gezeigt werden. Die Funktion p heisst die Weierstrass'sche p-Funktion.